

6. Клетков Ю. Л. MATLAB 7: программирование, численные методы / Ю. Л. Клетков, А. Ю. Клетков, М. М. Шульц. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 752 с.
7. Алексеев Е. Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9 / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. — М. : ИТ Пресс, 2006. — 496 с.
8. Ситник О. О. Універсальний алгоритм розрахунку інтегрального рівняння Вольтерри II роду із застосуванням формул Ньютона-Котеса / О. О. Ситник, Г. О. Кисельова, В. Б. Кисельов // Вісник ЧДТУ. — 2010. — № 3. — С. 36–42.

Considered the problem of numerical solution of nonlinear integral equations of Voltari-Lemma and Valteri-Hammerstein II by the method of simple iterations. The proposed recursive algorithms the implementation of the method of simple iterations using the formula of Newton-Cotes increased accuracy.

**Key words:** *nonlinear integral equations, quadrature formulae, numerical methods, iteration, algorithm, MatLab.*

Отримано: 17.02.2015

УДК 519.63

**Ю. Є. Климяк**, канд. техн. наук

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

## **МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПОЛІВ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ БАГАТОШАРОВИХ ФІЛЬТРІВ ІЗ КУСКОВО-ОДНОРІДНИМИ ПОРИСТИМИ ЗАВАНТАЖЕННЯМИ**

Розроблено алгоритм числової побудови просторового фільтраційного поля у багатошарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями, що мають форму двозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділених деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами фільтрації. Наведено результати числових розрахунків і здійснено їх аналіз.

**Ключові слова:** *фільтраційне поле, алгоритм, фільтр, пористе завантаження.*

**Вступ.** При математичному моделюванні просторових процесів доочистки води шляхом фільтрування її через пористі завантаження виникає багато труднощів із врахуванням багатошаровості, багатозв'язності, повздовжніх і поперечних викривленостей області, в якій шукається розв'язок, складністю рівнянь у частинних похідних і граничних умов відповідних задач. У зв'язку із цим для випадків областей, обмежених екві- або квазіеквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії, у рів-

няннях конвективної дифузії й граничних та початкових умовах доцільно перейти до нових незалежних змінних — координат області комплексного потенціалу. Завдяки цьому суттєво спрощується математичний запис задачі, а її розв'язання полягає у послідовному розв'язанні фільтраційної задачі [3] і задачі типу «конвекція-дифузія-масообмін» [2; 8].

Розв'язання стаціонарних задач фільтрації методами конформних і квазіконформних відображень у найбільш загальному випадку зводиться до побудови гідродинамічної сітки руху, складеної із екві- або квазіеквіпотенціальних ліній та ліній течії, обчислення поля швидкостей та величин різного роду перетоків тощо. Метод конформних відображень був запропонований і теоретично обґрунтований у [6] для розв'язування задач усталеної фільтрації в однорідних ізотропних насичених пористих середовищах. Цей метод використовували та розвивали далі чимало вчених [7]. Для розв'язування стаціонарних задач фільтрації в неоднорідних ізотропних та анізотропних насичених пористих середовищах використовується метод квазіконформних відображень [1]. У [4] сформульовано просторовий аналог крайової задачі на конформне відображення двозв'язних криволінійних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії, на відповідні прямокутні паралелепіпеди, та отримано числовий алгоритм розв'язання відповідної оберненої крайової задачі. У цій роботі алгоритм, описаний в [4], по аналогії з [5] адаптовано для безпосереднього застосування його до побудови просторових фільтраційних полів у багатопорових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями, що мають форму двозв'язних областей, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділених деякими двома заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, які характеризуються різними сталими коефіцієнтами фільтрації.

**Постановка задачі.** Для тришарового фільтру із кусково-однорідним пористим завантаженням, що має форму двозв'язної криволінійної області  $G_z$  ( $z = (x, y, z)$ ), обмеженої двома еквіпотенціальними гладкими поверхнями  $S_* = \{z : f_*(x, y, z) = 0\}$ ,  $S^* = \{z : f^*(x, y, z) = 0\}$  і двома поверхнями течії  $S_{**} = \{z : f_{**}(x, y, z) = 0\}$ ,  $S^{**} = \{z : f^{**}(x, y, z) = 0\}$  та розділеної деякими заданими  $p-1$  еквіпотенціальними поверхнями  $S_{*1}^* = \{z : f_{*1}^*(x, y, z) = 0\}$ ,  $S_{*2}^* = \{z : f_{*2}^*(x, y, z) = 0\}$ , ...,  $S_{*(p-1)}^* = \{z : f_{*(p-1)}^*(x, y, z) = 0\}$  на  $p$  підобластей  $G_z^1, G_z^2, \dots, G_z^p$  (рис. 1), розглянемо модельну задачу:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \varphi, \quad \text{div } \vec{v} = 0; \quad (1)$$

$$\varphi|_{S_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{S^*} = \varphi^*, \quad \varphi'_n|_{S_{**} \cup S^{**}} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varphi \Big|_{S_{*1-}^*} = \varphi \Big|_{S_{*1+}^*} = \varphi_{*1}^*, \quad \varphi \Big|_{S_{*2-}^*} = \varphi \Big|_{S_{*2+}^*} = \varphi_{*2}^*, \quad \dots, \\ \varphi \Big|_{S_{*(p-1)-}^*} = \varphi \Big|_{S_{*(p-1)+}^*} = \varphi_{*(p-1)}^*, \quad \kappa_1 \cdot \varphi_n^l \Big|_{S_{*1-}^*} = \kappa_2 \cdot \varphi_n^l \Big|_{S_{*1+}^*}, \\ \kappa_2 \cdot \varphi_n^l \Big|_{S_{*2-}^*} = \kappa_3 \cdot \varphi_n^l \Big|_{S_{*2+}^*}, \quad \dots, \quad \kappa_{(p-1)} \cdot \varphi_n^l \Big|_{S_{*(p-1)-}^*} = \kappa_p \cdot \varphi_n^l \Big|_{S_{*(p-1)+}^*}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\varphi = \varphi(x, y, z)$  — потенціал швидкості фільтрації,  $0 < \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^* < \infty$ ,  $\varphi_*$  і  $\varphi^*$  — довільні дійсні додатні числа,  $\varphi_{*1}^*$ ,  $\varphi_{*2}^*$ , ...,  $\varphi_{*(p-1)}^*$  — невідомі значення потенціалу на відповідних поверхнях розділу  $S_{*1}^*$ ,  $S_{*2}^*$ , ...,  $S_{*(p-1)}^*$ ,  $0 < \varphi_* < \varphi_{*1}^* < \varphi_{*2}^* < \dots < \varphi_{*(p-1)}^* < \varphi^* < \infty$ ,  $\kappa$  — коефіцієнт,

що характеризує область  $G_z$ ,  $\kappa = \begin{cases} \kappa_1, (x, y, z) \in G_z^1, \\ \kappa_2, (x, y, z) \in G_z^2, \\ \dots \\ \kappa_p, (x, y, z) \in G_z^p, \end{cases}$   $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_p$  —

довільні дійсні додатні числа,  $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$  — вектор швидкості фільтрації,  $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} \gg 0$ ,  $\vec{n}$  — зовнішня нормаль до відповідної поверхні, (3) — умови узгодженості на еквіпотенціальних поверхнях  $S_{*1}^*$ ,  $S_{*2}^*$ , ...,  $S_{*(p-1)}^*$  розділу підобластей  $G_z^1$ ,  $G_z^2$ , ...,  $G_z^p$ .

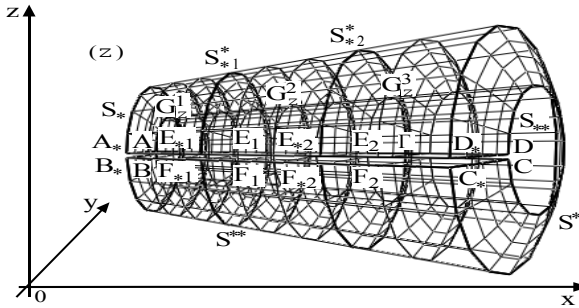


Рис. 1. Тришарова кусково-однорідна область  $G_z$  з розрізом  $\Gamma$  (фільтр)

Шляхом фіксації на поверхні  $S_{**}$  деякої лінії течії  $AD$  та виконання умовного розрізу  $\Gamma = ADD_*A_*BCC_*B_*$  вздовж відповідної поверхні течії  $ADD_*A_*$  (через  $ADD_*A_*$  та  $BCC_*B_*$  позначено відповідно верхній та нижній береги розрізу) задача (1)–(3) зводиться до розв'язання в однов'язній кусково-однорідній області  $G_z \setminus \Gamma$  — криволінійному пара-

лелепіпеді  $ABCD A_* B_* C_* D_*$ , обмеженому двома екіпотенціальними поверхнями  $ABB_* A_* = \{z : f_*(x, y, z) = 0\}$ ,  $CDD_* C_* = \{z : f^*(x, y, z) = 0\}$  та чотирма поверхнями течії  $ABCD = \{z : f_{**}(x, y, z) = 0\}$ ,  $A_* B_* C_* D_* = \{z : f^{**}(x, y, z) = 0\}$ ,  $ADD_* A_* = BCC_* B_* = \{z : \hat{f}(x, y, z) = 0\}$  і розділеному екіпотенціальними поверхнями  $E_s F_s F_{*s} E_{*s} = \{z : f_{*s}^*(x, y, z) = 0\}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) на підобласті

$$\begin{aligned} G_z^1 \setminus \Gamma^1 &= ABF_1 E_1 A_* B_* F_{*1} E_{*1}, \\ G_z^s \setminus \Gamma^s &= E_{s-1} F_{s-1} F_s E_s E_{*(s-1)} F_{*(s-1)} F_{*s} E_{*s} \quad (s = \overline{2, p-1}), \\ G_z^p \setminus \Gamma^p &= E_{p-1} F_{p-1} CDE_{*(p-1)} F_{*(p-1)} C_* D_*, \\ (\Gamma &= \Gamma^1 \cup \Gamma^2 \cup \dots \cup \Gamma^p, \quad \Gamma^1 = AE_1 E_{*1} A_* BF_1 F_{*1} B_*, \\ \Gamma^s &= E_{s-1} F_{s-1} F_s E_s E_{*(s-1)} F_{*(s-1)} F_{*s} E_{*s} \quad (s = \overline{2, p-1}), \\ \Gamma^p &= E_{p-1} DD_* E_{*(p-1)} F_{p-1} CC_* F_{*(p-1)}), \end{aligned}$$

які є гладкими і ортогональними між собою в кутових точках та вздовж ребер, з додаванням умови непроникності вздовж розрізу  $\varphi'_n|_{\Gamma} = \varphi'_n|_{ADD_* A_* \cup BCC_* B_*} = 0$  (рис. 1) задачі, що описується системою рівнянь (1) з наступними умовами:

$$\begin{aligned} \varphi|_{ABB_* A_*} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{CDD_* C_*} = \varphi^*, \\ \varphi'_n|_{ABCD \cup A_* B_* C_* D_* \cup ADD_* A_* \cup BCC_* B_*} &= 0 \\ \varphi|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} &= \varphi|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} = \varphi_{*s}^*, \\ \kappa_s \cdot \varphi'_n|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} &= \kappa_{s+1} \cdot \varphi'_n|_{E_s F_s F_{*s} E_{*s}} \quad (s = \overline{1, p-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

і подальшого «склеювання» берегів умовного розрізу  $\Gamma$  із використанням умов:

$$\varphi|_{ADD_* A_*} = \varphi|_{BCC_* B_*}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{ADD_* A_*} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}|_{BCC_* B_*}. \quad (7)$$

Тоді ввівши функції  $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\eta = \eta(x, y, z)$  (просторово комплексно спряжені із функцією  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ) такі, що  $\kappa \cdot \text{grad } \varphi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$ , і замінивши крайові умови (5) на умови:

$$\psi|_{ADD_* A_*} = 0, \quad \psi|_{BCC_* B_*} = Q_*, \quad \eta|_{ADCB} = 0, \quad \eta|_{A_* D_* C_* B_*} = Q^*, \quad (8)$$

задачу (1), (4), (8), (6), (7) замінимо більш загальною задачею на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення однозв'язної області  $G_z \setminus \Gamma$  на відповідну область комплексного потенціалу  $G_w = G_w^1 \cup G_w^2 \cup \dots \cup G_w^p$  (рис. 2), де

$G_W^I = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{*1}^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\},$   
 $G_W^S = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(s-1)}^* \leq \varphi \leq \varphi_{*s}^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\} (s = \overline{2, p-1}),$   
 $G_W^P = \{w = (\varphi, \psi, \eta) : \varphi_{*(p-1)}^* \leq \varphi \leq \varphi^*, 0 \leq \psi \leq Q_*, 0 \leq \eta \leq Q^*\}, \varphi_{*s}^* (s = \overline{1, p-1}),$   
 $Q_*, Q^*$  — невідомі величини, і наступного «склеювання» берегів умовного розрізу  $\Gamma$ . Ця задача описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} \kappa \cdot \varphi'_x = \psi'_y \cdot \eta'_z - \psi'_z \cdot \eta'_y, \\ \kappa \cdot \varphi'_y = \psi'_z \cdot \eta'_x - \psi'_x \cdot \eta'_z, \\ \kappa \cdot \varphi'_z = \psi'_x \cdot \eta'_y - \psi'_y \cdot \eta'_x \end{cases} \quad (9)$$

з умовами узгодженості на еквіпотенціальних поверхнях  $E_s F_s F_{*s} E_{*s} = \{z : f_{*s}^*(x, y, z) = 0\} (s = \overline{1, p-1})$  (6), крайовими умовами (4), (8), умовами ортогональності в околах ділянок границі області  $G_z$  :

$$\begin{cases} \text{grad } f_*(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_*(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = 0, \end{cases} (x, y, z) \in ABB_*A_*,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f^*(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f^*(x, y, z) \cdot \text{grad } \eta(x, y, z) = 0, \end{cases} (x, y, z) \in CDD_*C_*,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f_{**}(x, y, z) \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f_{**}(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \end{cases} (x, y, z) \in ABCD,$$

$$\begin{cases} \text{grad } f^{**}(x, y, z) \cdot \text{grad } \varphi(x, y, z) = 0, \\ \text{grad } f^{**}(x, y, z) \cdot \text{grad } \psi(x, y, z) = 0, \end{cases} (x, y, z) \in A_*B_*C_*D_* \quad (10)$$

і умовами «склеювання» берегів умовного розрізу  $\Gamma$  (7).

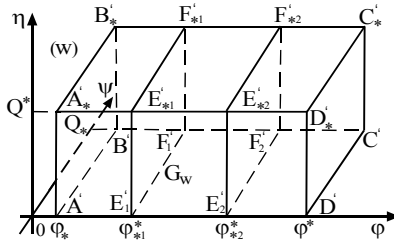


Рис. 2. Тришарова область комплексного потенціалу  $G_W$

Обернена задача на знаходження просторового аналогу кусково-конформного відображення  $G_W \rightarrow G_z \setminus \Gamma$  (при невідомих значеннях

параметрів  $\varphi_{*1}^*$ ,  $\varphi_{*2}^*$ ,  $Q_*$ ,  $Q^*$ ) із наступним «склеюванням» берегів умовного розрізу  $\Gamma$  описується системою рівнянь:

$$\begin{cases} x'_\varphi = \kappa \cdot (y'_\psi \cdot z'_\eta - z'_\psi \cdot y'_\eta), \\ y'_\varphi = \kappa \cdot (z'_\psi \cdot x'_\eta - x'_\psi \cdot z'_\eta), \\ z'_\varphi = \kappa \cdot (x'_\psi \cdot y'_\eta - y'_\psi \cdot x'_\eta) \end{cases} \quad (11)$$

з умовами узгодженості на поверхнях розділу:

$$\begin{cases} f_{*s}^* \left( x(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta), y(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta), z(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) \right) = 0, \\ \kappa_s \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* + 0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)} = \\ = \kappa_{s+1} \cdot \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_{*s}^* - 0} \sqrt{x_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + y_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta) + z_\varphi'^2(\varphi_{*s}^*, \psi, \eta)}, \quad (s = 1, p-1), \end{cases} \quad (12)$$

крайовими умовами із умовами «склеювання» берегів розрізу:

$$\begin{cases} f_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) = 0, \\ f^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta)) = 0, \\ x(\varphi, 0, \eta) = x(\varphi, Q_*, \eta), \quad y(\varphi, 0, \eta) = y(\varphi, Q_*, \eta), \\ z(\varphi, 0, \eta) = z(\varphi, Q_*, \eta), \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} x_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*, -0} x_\psi, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0+0} y_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*, -0} y_\psi, \quad \lim_{\psi \rightarrow 0+0} z_\psi = \lim_{\psi \rightarrow Q_*, -0} z_\psi, \\ f_{**}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) = 0, \\ f_{**}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*)) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

і умовами ортогональності в околах ділянок границі області:

$$\begin{cases} f_{*x}' \cdot x'_\psi + f_{*y}' \cdot y'_\psi + f_{*z}' \cdot z'_\psi = 0, & \begin{cases} f_x^{t*} \cdot x'_\psi + f_y^{t*} \cdot y'_\psi + f_z^{t*} \cdot z'_\psi = 0, \\ f_x^{t*} \cdot x'_\eta + f_y^{t*} \cdot y'_\eta + f_z^{t*} \cdot z'_\eta = 0, \end{cases} \\ f_{**x}' \cdot x'_\varphi + f_{**y}' \cdot y'_\varphi + f_{**z}' \cdot z'_\varphi = 0, & \begin{cases} f_x^{t**} \cdot x'_\varphi + f_y^{t**} \cdot y'_\varphi + f_z^{t**} \cdot z'_\varphi = 0, \\ f_x^{t**} \cdot x'_\psi + f_y^{t**} \cdot y'_\psi + f_z^{t**} \cdot z'_\psi = 0. \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

**Різницький аналог задачі та алгоритм числового розв'язання.** В області  $G_w$  будемо кусково-рівномірну ортогональну сітку

$$G_w^r = \left\{ (\varphi_i, \psi_j, \eta_k) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi_1 \cdot i, \quad i = \overline{0, n_1}, \quad \varphi_i = \varphi_{*1}^* + \Delta\varphi_2 \cdot (i - n_1), \right.$$

$$\left. i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \quad \varphi_i = \varphi_{*s}^* + \Delta\varphi_{s+1} \cdot (i - \sum_{r=1}^j n_r), \quad i = \overline{\sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^s n_r}, \right.$$

$$\begin{aligned}
 s = \overline{2, p-2}, \quad \varphi_i = \varphi_{*(p-1)}^* + \Delta\varphi_p \cdot (i - \sum_{r=1}^{p-1} n_r), \quad i = \sum_{r=1}^{p-1} n_r + 1, n+1; \\
 \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, m+1}; \quad \eta_k = \Delta\eta \cdot k, \quad k = \overline{0, l+1}; \quad \Delta\varphi_1 = \frac{\varphi_{*1}^* - \varphi_*}{n_1}, \\
 \Delta\varphi_2 = \frac{\varphi_{*2}^* - \varphi_{*1}^*}{n_2}, \quad \Delta\varphi_s = \frac{\varphi_{*s}^* - \varphi_{*s-1}^*}{n_s} \quad (s = \overline{3, p-1}), \quad \Delta\varphi_p = \frac{\varphi^* - \varphi_{*p-1}^*}{n_p + 1}, \\
 \Delta\psi = \frac{Q^*}{m+1}, \quad \Delta\eta = \frac{Q^*}{l+1}, \quad \gamma_s = \frac{\Delta\varphi_s}{\Delta\psi \cdot \Delta\eta} \quad (s = \overline{1, p}) \Big\},
 \end{aligned}$$

де  $n = \sum_{r=1}^p n_r$ ,  $m, l \in N$  — параметри розбиття області комплексного

потенціалу, а  $\Delta\varphi_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ),  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\eta$  — кроки сітки відповідно по змінних  $\varphi$ ,  $\psi$  та  $\eta$ . Через  $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$ ,  $y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$ ,  $z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \eta_k)$  позначимо координати відповідних вузлів сітки.

Для числової побудови відображення прямокутного паралелепіпеда  $G_w$  на криволінійну область  $G_z \setminus \Gamma$  (при відповідності вершин) із наступним «склеюванням» берегів умовного розрізу  $\Gamma$  запишемо різниці аналогів рівнянь системи (11) у рівномірній сітковій області  $G_w'$  через ліві та праві різниці схеми:

$$\left\{ \begin{aligned}
 x_{i,j,k} &= x_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\
 &\quad \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\
 y_{i,j,k} &= y_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\
 z_{i,j,k} &= z_{i-1,j,k} + \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\
 &\quad \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\
 i &= \overline{1, n_1 - 1}, \quad s = 1; \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, \quad s = 2; \quad i = \sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^s n_r - 1, \quad s = \overline{3, p-1}; \\
 i &= \sum_{r=1}^{p-1} n_r + 1, n; \quad s = p, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, l},
 \end{aligned} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& x_{i,j,k} = x_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left( (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \\
& \left. - (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) \right), \\
& y_{i,j,k} = y_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left( (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k}) - \right. \\
& \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) \right), \\
& z_{i,j,k} = z_{i+1,j,k} - \frac{1}{4} \cdot \kappa_s \cdot \gamma_s \cdot \left( (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k}) (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - \right. \\
& \left. - (x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k}) \right), \\
& i = \overline{1, n_1 - 1}, s = 1; i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, s = 2; i = \overline{\sum_{r=1}^{s-1} n_r + 1, \sum_{r=1}^s n_r - 1}, \\
& s = \overline{3, p-1}; i = \overline{\sum_{r=1}^{p-1} n_r + 1, n}, s = p, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}.
\end{aligned} \right. \quad (16)$$

Координати вузлів на екіпотенціальних поверхнях  $E_s F_s F_{*s} E_{*s}$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) уточнюємо, використовуючи наступні різниці рівняння:

$$f_{*s}(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k}) = 0, \quad r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
& \kappa_s \cdot \Delta \varphi_s \cdot \sqrt{(x_{r+1,j,k} - x_{r,j,k})^2 + (y_{r+1,j,k} - y_{r,j,k})^2 + (z_{r+1,j,k} - z_{r,j,k})^2} = \\
& = \kappa_{s+1} \cdot \Delta \varphi_{s+1} \cdot \sqrt{(x_{r,j,k} - x_{r-1,j,k})^2 + (y_{r,j,k} - y_{r-1,j,k})^2 + (z_{r,j,k} - z_{r-1,j,k})^2}, \\
& r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad s = \overline{1, p-1}, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{f'_{*sx}(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{x_{r,j,k} - x_{r-1,j,k}} = \frac{f'_{*sy}(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{y_{r,j,k} - y_{r-1,j,k}} = \frac{f'_{*sz}(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{z_{r,j,k} - z_{r-1,j,k}}, \\
& r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}, \quad (19)
\end{aligned}$$

або

$$\frac{f'_{*sx}(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{x_{r,j,k} - x_{r-1,j,k}} = \frac{f'_{*sy}(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{y_{r,j,k} - y_{r-1,j,k}} = \frac{f'_{*sz}(x_{r,j,k}, y_{r,j,k}, z_{r,j,k})}{z_{r,j,k} - z_{r-1,j,k}},$$



$$r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad s = \overline{1, p-1}, \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}. \quad (20)$$

Крайові умови із умовами «склеювання» берегів розрізу (13) апроксимуємо точково-різницевиими рівняннями:

$$\begin{cases} f_* (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k}) = 0, f^* (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k}) = 0, \\ f^{**} (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0}) = 0, f^{***} (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1}) = 0, \\ x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k}, y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k}, z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k}, \\ x_{i,1,k} - x_{i,0,k} = x_{i,m+1,k} - x_{i,m,k}, y_{i,1,k} - y_{i,0,k} = y_{i,m+1,k} - y_{i,m,k}, \\ z_{i,1,k} - z_{i,0,k} = z_{i,m+1,k} - z_{i,m,k}, i = \overline{0, n+1}, j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}. \end{cases} \quad (21)$$

Умови ортогональності в околах ділянок границі області (14) записуються такими числово-аналітичними різницевиими рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{f'_{*x} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{x_{1,j,k} - x_{0,j,k}} &= \frac{f'_{*y} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{y_{1,j,k} - y_{0,j,k}} = \frac{f'_{*z} (x_{0,j,k}, y_{0,j,k}, z_{0,j,k})}{z_{1,j,k} - z_{0,j,k}}, \\ \frac{f^{*f}_x (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{x_{n,j,k} - x_{n+1,j,k}} &= \frac{f^{*f}_y (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{y_{n,j,k} - y_{n+1,j,k}} = \\ &= \frac{f^{*f}_z (x_{n+1,j,k}, y_{n+1,j,k}, z_{n+1,j,k})}{z_{n,j,k} - z_{n+1,j,k}}, \\ \frac{f'^{**}_x (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{x_{i,j,1} - x_{i,j,0}} &= \frac{f'^{**}_y (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{y_{i,j,1} - y_{i,j,0}} = \frac{f'^{**}_z (x_{i,j,0}, y_{i,j,0}, z_{i,j,0})}{z_{i,j,1} - z_{i,j,0}}, \\ \frac{f^{***}_x (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{x_{i,j,l} - x_{i,j,l+1}} &= \frac{f^{***}_y (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{y_{i,j,l} - y_{i,j,l+1}} = \\ &= \frac{f^{***}_z (x_{i,j,l+1}, y_{i,j,l+1}, z_{i,j,l+1})}{z_{i,j,l} - z_{i,j,l+1}}, \\ i = \overline{0, n+1}, j = \overline{0, m+1}, k = \overline{0, l+1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Інваріанти відображення  $\gamma_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ) криволінійних паралелепіпедів  $G_z^s$  ( $s = \overline{1, p}$ ) є невідомими величинами і визначаються в процесі розрахунку аналогічно [6]. Формули для наближеного знаходження даних величин мають вигляд:

$$\gamma_s = \frac{\kappa_s}{n_s(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_s-1,m,l} \gamma_{r+i,j,k}, \quad r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q, \quad s = \overline{1, p-1}, \quad (23)$$

$$\gamma_p = \frac{\kappa_p}{(n_p+1)(m+1)(l+1)} \sum_{i,j,k=0}^{n_p,m,l} \gamma_{r+i,j,k}, \quad r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{i,j,k} = & 4 \left( \sqrt{(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k+1})^2} \Big) / \\ & / \left( \left( \sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} + \right. \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j,k+1})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j,k+1})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j,k+1})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j,k+1})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j,k+1})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j,k+1})^2} \Big) \times \\ & \times \left( \sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} + \right. \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j,k+1} - x_{i+1,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k+1} - y_{i+1,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k+1} - z_{i+1,j,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i,j+1,k+1} - x_{i,j+1,k})^2 + (y_{i,j+1,k+1} - y_{i,j+1,k})^2 + (z_{i,j+1,k+1} - z_{i,j+1,k})^2} + \\ & + \sqrt{(x_{i+1,j+1,k+1} - x_{i+1,j+1,k})^2 + (y_{i+1,j+1,k+1} - y_{i+1,j+1,k})^2 + (z_{i+1,j+1,k+1} - z_{i+1,j+1,k})^2} \Big) \Big). \end{aligned}$$

Невідомі величини  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ) аналогічно [6] знаходяться за формулами:

$$\varphi_{*s}^* = \frac{\sum_{r=1}^s (n_r \cdot \gamma_r) \cdot \varphi^* + \left( \sum_{r=s+1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \right) \cdot \varphi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad s = \overline{1, p-1}, \quad (25)$$

$$\varphi_{*p}^* = \frac{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) \cdot \varphi^* + (n_p + 1) \cdot \gamma_p \cdot \varphi_*}{\sum_{r=1}^{p-1} (n_r \cdot \gamma_r) + (n_p + 1) \cdot \gamma_p}, \quad (26)$$

повна фільтраційна витрата  $Q$  за однією з формул:

$$Q = Q_s = \Delta \varphi_s \cdot \frac{(m+1)(l+1)}{\gamma_s}, \quad s = \overline{1, p}. \quad (27)$$

Розв'язок отриманої вище різницевої задачі (15)–(27) знаходимо шляхом поетапної параметризації величин  $\gamma_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ), координат граничних та внутрішніх вузлів відповідної кусково-рівномірної сітки у вихідній області  $G_z^\gamma$ . А саме, задавши параметри розбиття сіткової області  $G_w^\gamma$  ( $n_1, n_2, \dots, n_p, m$  та  $l$ ), параметр  $\varepsilon$ , що характеризує точність наближення розв'язку відповідної різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів

$$\begin{aligned} & \left( x_{0,j,k}^{(0)}, y_{0,j,k}^{(0)}, z_{0,j,k}^{(0)} \right), \left( x_{n+1,j,k}^{(0)}, y_{n+1,j,k}^{(0)}, z_{n+1,j,k}^{(0)} \right), \quad j = \overline{0, m+1}, \quad k = \overline{0, l+1}, \\ & \left( x_{i,0,k}^{(0)}, y_{i,0,k}^{(0)}, z_{i,0,k}^{(0)} \right), \left( x_{i,m+1,k}^{(0)}, y_{i,m+1,k}^{(0)}, z_{i,m+1,k}^{(0)} \right), \quad i = \overline{1, n_1-1}, \quad k = \overline{0, l+1}, \\ & \left( x_{r+i,0,k}^{(0)}, y_{r+i,0,k}^{(0)}, z_{r+i,0,k}^{(0)} \right), \left( x_{r+i,m+1,k}^{(0)}, y_{r+i,m+1,k}^{(0)}, z_{r+i,m+1,k}^{(0)} \right), \quad r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q, \\ & \quad i = \overline{1, n_s-1}, \quad k = \overline{0, l+1}, \quad s = \overline{2, p-1}, \quad \left( x_{r+i,0,k}^{(0)}, y_{r+i,0,k}^{(0)}, z_{r+i,0,k}^{(0)} \right), \\ & \left( x_{r+i,m+1,k}^{(0)}, y_{r+i,m+1,k}^{(0)}, z_{r+i,m+1,k}^{(0)} \right), \quad r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, \quad i = \overline{1, n_p}, \quad k = \overline{0, l+1}, \\ & \left( x_{i,j,0}^{(0)}, y_{i,j,0}^{(0)}, z_{i,j,0}^{(0)} \right), \left( x_{i,j,l+1}^{(0)}, y_{i,j,l+1}^{(0)}, z_{i,j,l+1}^{(0)} \right), \quad i = \overline{1, n_1-1}, \quad j = \overline{1, m}, \\ & \left( x_{r+i,j,0}^{(0)}, y_{r+i,j,0}^{(0)}, z_{r+i,j,0}^{(0)} \right), \left( x_{r+i,j,l+1}^{(0)}, y_{r+i,j,l+1}^{(0)}, z_{r+i,j,l+1}^{(0)} \right), \\ & r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q, \quad i = \overline{1, n_s-1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad s = \overline{2, p-1}, \quad \left( x_{r+i,j,0}^{(0)}, y_{r+i,j,0}^{(0)}, z_{r+i,j,0}^{(0)} \right), \\ & \left( x_{r+i,j,l+1}^{(0)}, y_{r+i,j,l+1}^{(0)}, z_{r+i,j,l+1}^{(0)} \right), \quad r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, \quad i = \overline{1, n_p}, \quad j = \overline{1, m} \end{aligned}$$

і вузлів поверхонь розділу  $\left( x_{r,j,k}^{(0)}, y_{r,j,k}^{(0)}, z_{r,j,k}^{(0)} \right), \quad r = \sum_{q=1}^s n_q, \quad j = \overline{0, m+1},$

$k = \overline{0, l+1}, \quad s = \overline{1, p-1}$  (так, щоб виконувались рівності відповідно

(17) і (21)), початкові наближення координат внутрішніх вузлів всіх підобластей

$$\begin{aligned} & \left( x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)} \right), i = \overline{1, n_1 - 1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \\ & \left( x_{r+i,j,k}^{(0)}, y_{r+i,j,k}^{(0)}, z_{r+i,j,k}^{(0)} \right), r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q, i = \overline{1, n_s - 1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \\ & s = \overline{2, p-1}, \left( x_{i,j,k}^{(0)}, y_{r+i,j,k}^{(0)}, z_{r+i,j,k}^{(0)} \right), r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, i = \overline{1, n_p}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \end{aligned}$$

за формулами (23), (24) знаходимо початкові наближення  $\gamma_p^{(0)} = \gamma_p \left( x_{i,j,k}^{(0)}, y_{i,j,k}^{(0)}, z_{i,j,k}^{(0)} \right)$  інваріантів відображення  $\gamma_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ).

Уточнення координат внутрішніх вузлів

$$\begin{aligned} & \left( x_{i,j,k}^{(g)}, y_{i,j,k}^{(g)}, z_{i,j,k}^{(g)} \right), i = \overline{1, n_1 - 1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \\ & \left( x_{r+i,j,k}^{(g)}, y_{r+i,j,k}^{(g)}, z_{r+i,j,k}^{(g)} \right), r = \sum_{q=1}^{s-1} n_q, i = \overline{1, n_s - 1}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l}, \\ & s = \overline{2, p-1}, \left( x_{i,j,k}^{(g)}, y_{r+i,j,k}^{(g)}, z_{r+i,j,k}^{(g)} \right), r = \sum_{q=1}^{p-1} n_q, i = \overline{1, n_p}, j = \overline{1, m}, k = \overline{1, l} \end{aligned}$$

проводимо на основі почергового розв'язання систем (15) і (16) із використанням значень з попереднього кроку ітерації  $g$  ( $g = 0, 1, \dots$  — номер кроку ітерації). Далі підправляємо координати вузлів поверхонь розділу на основі рівнянь (17), (18) та почергового використання (19) і (20), координати граничних вузлів, розв'язуючи наближено систему рівнянь, сформовану з (21) і (22). Потім знаходимо нові наближення  $\gamma_s$  ( $s = \overline{1, p}$ ) за формулами (23), (24), величин  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q$  — за формулами (25)–(27) та перевіряємо виконання умов стабілізації координат вузлів сітки і величин  $\varphi_{*s}^*$  ( $s = \overline{1, p-1}$ ),  $Q$  відносно кроку ітерації відповідно:

$$\begin{aligned} & \max_{x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k} \in \partial G_z} \left( \left| x_{i,j,k}^{(g+1)} - x_{i,j,k}^{(g)} \right|, \left| y_{i,j,k}^{(g+1)} - y_{i,j,k}^{(g)} \right|, \right. \\ & \left. \left| z_{i,j,k}^{(g+1)} - z_{i,j,k}^{(g)} \right| \right) < \varepsilon, \left| \varphi_{*1}^{(g+1)} - \varphi_{*1}^{(g)} \right| < \varepsilon, \left| \varphi_{*2}^{(g+1)} - \varphi_{*2}^{(g)} \right| < \varepsilon, \dots, \\ & \left| \varphi_{*p-1}^{(g+1)} - \varphi_{*p-1}^{(g)} \right| < \varepsilon, \left| Q^{(g+1)} - Q^{(g)} \right| < \varepsilon. \end{aligned} \quad (28)$$

Якщо умови (28) не виконуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т. д. Інакше для отриманих ко-

ординат вузлів гідродинамічної сітки обчислюємо нев'язку рівнянь системи (11):  $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}$ , де

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1+n_2 \\ \dots \\ i \neq n_1+n_2+\dots+n_{p-1}}} \left| \left( (x_{i+1,j,k} - x_{i-1,j,k}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{2} \cdot ((y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1})) \right) \right|, \\ \delta_2 &= \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1+n_2 \\ \dots \\ i \neq n_1+n_2+\dots+n_{p-1}}} \left| \left( (y_{i+1,j,k} - y_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{2} \cdot ((z_{i,j+1,k} - z_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k-1})) \right) \right|, \\ \delta_3 &= \max_{\substack{n,m,l \\ i,j,k=1 \\ i \neq n_1 \\ i \neq n_1+n_2 \\ \dots \\ i \neq n_1+n_2+\dots+n_{p-1}}} \left| \left( (z_{i+1,j,k} - z_{i-1,j,k}) - \frac{\kappa_s \cdot \gamma_s}{2} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times ((x_{i,j+1,k} - x_{i,j-1,k})(y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k-1}) - (y_{i,j+1,k} - y_{i,j-1,k})(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k-1})) \right) \right|, \\ s &= \begin{cases} 1, i = \overline{1, n_1 - 1}, \\ 2, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2 - 1}, \\ \dots \\ p, i = \overline{n_1 + n_2 + \dots + n_{p-1} + 1, n}. \end{cases} \end{aligned}$$

Якщо точність отриманого розв'язку нас не задовольняє, то збільшимо кількість вузлів розбиття сітки  $G_z^\gamma$  та розв'язуємо задачу заново.

Величини швидкості у внутрішніх вузлах гідродинамічної сітки  $G_z^\gamma$  знаходимо за формулами, наведеними в [3], а формули для знаходження величин швидкостей у граничних вузлах і на поверхнях розділу отримуються аналогічно до [2].

**Програмна реалізація алгоритму та числові приклади.** З метою перевірки коректної роботи алгоритму проведено числовий експеримент.

перимент на побудову просторового фільтраційного поля для тришарового фільтру із кусково-однорідним завантаженням, форму якого описано поверхнями:

$$f_*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4, \quad f^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,$$

$$f_{**}(x, y, z) = 32,1632 \cdot x^2 - y^2 - z^2, \quad f^{**}(x, y, z) = 7,5487 \cdot x^2 - y^2 - z^2,$$

а межі розділу шарів — поверхнями:

$$f_{*1}^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2,25, \quad f_{*2}^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1,44.$$

У результаті побудовано розрахункову гідродинамічну сітку (рис. 3) при  $n_1 = 11$ ,  $n_2 = 11$ ,  $n_3 = 10$  ( $n = 32$ ),  $m = 16$ ,  $l = 12$ ,  $\varphi_* = 0$ ,  $\varphi^* = 4891$ ,  $\kappa_1 = 5,6$  м/добу,  $\kappa_2 = 8,4$  м/добу,  $\kappa_3 = 9,8$  м/добу, ефективних пористостях завантажень  $\sigma_1 = 0,45$ ,  $\sigma_2 = 0,35$  і  $\sigma_3 = 0,25$  (параметри  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ ,  $m$  і  $l$  вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної). При цьому знайдено фільтраційну витрату  $Q = 0,325$  м<sup>3</sup>/год, потенціали на поверхнях розділу  $\varphi_{*1}^* = 2054,06$  і  $\varphi_{*2}^* = 3814,8$ , обчислено величини швидкості фільтрації (рис. 4), що відповідають величині середньої швидкості руху води через кусково-однорідне завантаження тришарового фільтру 10 м/год.

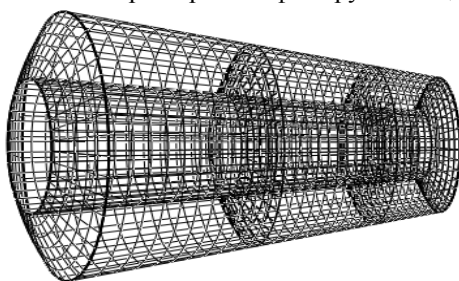


Рис. 3. Розрахункова гідродинамічна сітка

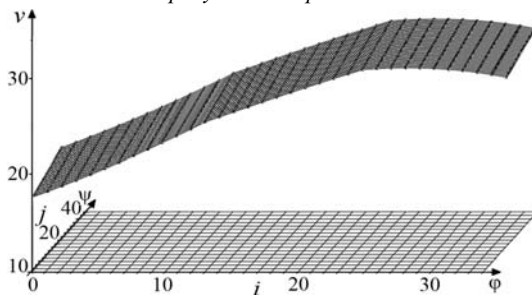


Рис. 4. Розподіл величин швидкості фільтрації  
вддовж поверхні течії  $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_4$

**Висновки і зауваження.** Побудовано алгоритм числового розв'язання просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення багатoshарових кусково-однорідних двозв'язних областей, які обмежені двома еквіпотенціальними поверхнями і двома поверхнями течії та розділені деякими заданими еквіпотенціальними поверхнями на кілька підобластей, що характеризуються сталими коефіцієнтами фільтрації, на відповідні прямокутні паралелепіпеди, зокрема, отримано вирази для знаходження значень фільтраційного потенціалу на відповідних поверхнях розділу, повної фільтраційної витрати, розрахунку поля швидкостей тощо.

Результати числового експерименту свідчать про ефективність запропонованого підходу до побудови просторових фільтраційних полів у багатoshарових фільтрах із кусково-однорідними пористими завантаженнями і, по аналогії з [1; 2], дають змогу провести теоретичні дослідження стосовно підвищення ефективності їх роботи, зокрема, більш раціонального використання сорбційної ємності і збільшення терміну фільтроциклу [3].

### Список використаних джерел:

1. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопєцький. — К. : Наук. думка, 2007. — 308 с.
2. Бомба А. Я. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу «конвекція-дифузія» / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климяк, В. В. Скопєцький // Доп. НАН України. — 2007. — № 8. — С. 37–44.
3. Климяк Ю. Є. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климяк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — Рівне : РВВ РДГУ, 2008. — Вип. 5 (14). — С. 104–143.
4. Климяк Ю. Є. Числове розв'язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двозв'язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климяк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — Рівне : РВВ РДГУ, 2009. — Вип. 6 (15). — С. 59–71.
5. Климяк Ю. Є. Побудова алгоритму числового розв'язування просторових аналогів обернених крайових задач на кусково-конформні відображення для одного класу кусково-однорідних областей/ Ю. Є. Климяк // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — Рівне : РДГУ, 2012. — Вип. 9 (18). — С. 59–73.
6. Павловский Н. Н. Движение грунтовых вод. Собр. сочинений: В 2 т. / Н. Н. Павловский. — М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1956. — Т. 2. — 771 с.
7. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967) / под ред. П. Я. Полубариновой-Кочиной. — М. : Наука, 1969. — 546 с.
8. Сівак В. М. Числово-асимптотичне наближення розв'язку просторової модельної задачі процесу видалення залишкового алюмінію при фільтру-

ванні через окислювально-відновні завантаження / В. М. Сівак, А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво : зб. наук. праць. — Рівне : НУВГП, 2009. — Вип. 34. — С. 252–261.

The algorithm for numerical construction of spatial filtration fields in multilayer filters with a piecewise-homogeneous porous loadings, which are doubly connected domains, bounded by two equipotential surfaces and two surfaces of current, separated by some specified equipotential surfaces into few subdomains, which are characterized by different constant coefficients of filtration, is developed. The results of numerical calculations are presented and carried out their analysis.

**Key words:** *filtration field, algorithm, filter, porous loading.*

Отримано: 4.03.2015

УДК 004.94

**Н. Л. Костьян\***, старший преподаватель,  
**С. Ю. Протасов\*\***, канд. техн. наук

\*Киевский национальный университет технологий и дизайна, г. Киев,

\*\*Черкасский государственный технологический университет,  
г. Черкассы

## **АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Рассматриваются задачи идентификации динамических объектов с запаздыванием. Задачи решаются методом моментов, в результате чего определяются параметры передаточной функции объекта. Качество разработанных программных средств, реализующих данный метод, исследуется при помощи вычислительных экспериментов.

**Ключевые слова:** *идентификация, моделирование, динамические системы с запаздыванием, Matlab.*

**Введение.** Существует множество динамических объектов практически во всех отраслях науки, техники и промышленности, статические и динамические свойства которых изменяются неконтролируемым образом, а априорные сведения об этих изменениях и о самих физических, математических и расчетных моделях «объект — внешняя среда» только в определенной степени соответствуют действительности. В этих случаях практический результат управления не соответствует моделируемому или является совершенно непригодным. Возникает потребность в методах управления, учитывающих наличие априорной и текущей неопределенности. При этом адаптивные методы и соответствующие технические